Вынужденные колебания системы без учета сопротивления

Для возбуждения вынужденных колебаний необходимо действие на точки механической системы возмущения в той или иной форме. Наиболее часто встречаются случаи силового и кинематического возбуждений. Рассмотрим эти случаи на примере прямолинейных колебаний груза массой m по горизонтальной гладкой плоскости (рис. 118, *а*) под действием пружины, жесткость которой c.

Пусть на груз дополнительно действует зависящая от времени сила $\Phi(t)$. У груза одна степень свободы. Связи (гладкая поверхность) являются идеальными. Составим для движения груза уравнение Лагранжа, приняв x за обобщенную

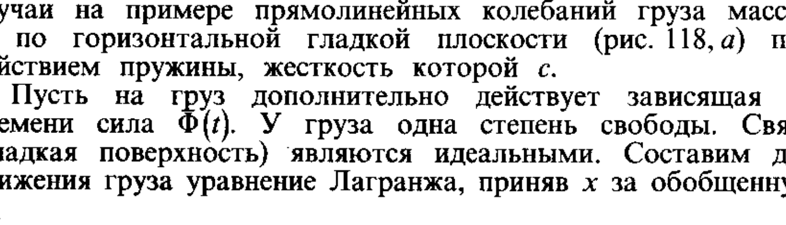

Рис. 118

координату, отсчитываемую от положения груза, при котором пружина не деформирована. Имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}=Q^{П}+Q^{B}.$$

Силы сопротивления отсутствуют, т. е. $Q^{\Phi}=0$. Кинетическая энергия груза

$$T=m\frac{\dot{x}^2}{2}.$$

Потенциальная энергия и обобщенная сила

$$П=cx^2/2;\ \ Q^{П}=-\partial П/\partial x=-cx.$$

Для обобщенной силы Q^B получаем

$$Q^B=\sum \bar{F}_k\cdot\delta\bar{r}_k/(\delta x)=\Phi\delta x/(\delta x)=\Phi(t),$$

где δx — возможное перемещение груза в направлении возрастания x.

Вычислим производные от кинетической энергии. Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0;\ \ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x};\ \ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\ddot{x}.$$

Подставляя полученные величины в уравнение Лагранжа, получаем

$$m\ddot{x}=-cx+\Phi(t)\ \text{ или }\ m\ddot{x}+cx=\Phi(t).$$

В случае гармонической возмущающей силы

$$Q^B=\Phi(t)=H\sin(pt+\delta),$$

где H, p и δ — постоянные величины. Уравнение движения груза принимает форму

$$m\ddot{x}+cx=H\sin(pt+\delta).$$

Предположим в той же задаче о движении груза, что сила $\Phi=0$, а следовательно, и $Q^B=0$, но вместо этого задано движение конца пружины — точки A в направлении оси Ox — в форме $z=z(t)$ (рис. 118, *б*). Составим уравнение Лагранжа для груза относительно подвижной системы отсчета Oxy, начало которой движется вместе с точкой A так, что OA остается все время постоянным. В этом случае по-прежнему

$$Q^{П}=-\partial П/\partial x=-cx.$$

Кинетическая энергия груза

$$T=\frac{mv^2}{2}=m\frac{(\dot{x}+\dot{z})^2}{2},$$

так как движение груза можно рассматривать как сложное, состоящее из переносного поступательного вместе с точкой A и относительного по отношению к теперь уже подвижной системе координат Oxy. По теореме о сложении скоростей скорость абсолютного движения v равна сумме скоростей переносного и относительного движений, т. е. $v=\dot{z}+\dot{x}$. Для производных от кинетической энергии имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0;\ \ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m(\dot{x}+\dot{z});\ \ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m(\ddot{x}+\ddot{z}).$$

Подставляя полученные величины в уравнение Лагранжа, получим

$$m(\ddot{x}+\ddot{z})=-cx;\ \ m\ddot{x}+cx=-m\ddot{z}.$$

Роль обобщенной силы в этом уравнении выполняет величины — $m\ddot{z}$. Если точка A совершает гармонические колебания, то

$$z=z_0\sin(pt+\delta),$$

где z_0, p, δ — постоянные величины. В этом случае

$$-m\ddot{z}=mz_0p^2\sin(pt+\delta)$$

и дифференциальное уравнение движения груза примет форму

$$m\ddot{x}+cx=mz_0p^2\sin(pt+\delta),$$

т. е. то же, что и в первом случае, но $H=mz_0p^2$.

Если вместо $z(t)$ задать скорость точки A, изменяющуюся по гармоническому закону

$$v_A=\dot{z}=\dot{z}_0\sin(pt+\delta),$$

то уравнение движения груза примет вид

$$m\ddot{x}+cx=m\dot{z}_0p\sin\left(pt+\delta-\frac{\pi}{2}\right)$$

и в этом случае $H=m\dot{z}_0p$.

Существенное различие этих случаев состоит в том, что при силовом возбуждении H не зависит от круговой частоты p. При кинематическом возбуждении заданием движения $z=z_0\sin(pt+\delta)$ точки A оно пропорционально p^2, а при возбуждении заданием скорости $\dot{z}=\dot{z}_0\sin(pt+\delta)$ точки A — пропорционально p. Силовое возбуждение эквивалентно возбуждению путем задания ускорения точки A.

При дальнейшем рассмотрении вынужденных колебаний ограничимся случаем силового возбуждения.

Пусть обобщенная сила состоит из двух сил: потенциальной $Q^{П}=-\partial П/\partial q=-cq$ и гармонической возмущающей $Q^B=H\sin(pt+\delta)$.

Часть обобщенной силы Q^{Φ}, зависящую от сил сопротивления, считаем равной нулю. Постоянные H, p и δ, характеризующие гармоническую возмущающую силу, соответственно являются амплитудой, круговой частотой и начальной фазой этой силы. В этом случае, как и в случае собственных линейных колебаний, из уравнения Лагранжа в предположении, что для кинетической и потенциальной энергий справедливы формулы (2) и (3), получаем дифференциальное уравнение

$$a\ddot{q}+cq=H\sin(pt+\delta). \qquad (37)$$

Разделим обе части (37) на a и введем обозначения $k^2=c/a$, $h=H/a$.

Здесь k — круговая частота собственных колебаний, h — относительная амплитуда возмущающей силы.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний без сопротивления в окончательной форме имеет вид

$$\ddot{q}+k^2q=h\sin(pt+\delta). \qquad (38)$$

Получено неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение, согласно теории дифференциальных уравнений, состоит из общего решения однородного уравнения q_1 и частного решения неоднородного уравнения q_2. Общее решение уравнения (38) есть сумма этих двух решений, т. е. $q=q_1+q_2$.

Однородное уравнение для определения q_1, т. е. уравнение $\ddot{q}_1+k^2q_1=0$, совпадает с дифференциальным уравнением собственных колебаний. Поэтому его решение q_1 называют *собственным колебанием системы*. Оно может быть выражено в двух эквивалентных формах:

$$q_1=C_1\cos kt+C_2\sin kt=A_1\sin(kt+\alpha_1). \qquad (39)$$

Часть движения системы, характеризуемая функцией q_2, является частным решением уравнения (38). Эту часть движения называют *вынужденным колебанием* системы. Функция q_2 определяется по-разному в зависимости от соотношения частот собственных колебаний и возмущающей силы.

Возможны два случая: отсутствие резонанса $p\neq k$ и резонанс при $p=k$. Рассмотрим их.

1. Случай отсутствия резонанса. В случае отсутствия резонанса $p\neq k$ и частное решение q_2 следует искать в той же форме, что и правая часть уравнения (38):

$$q_2=B\sin(pt+\delta). \qquad (40)$$

Постоянная B подлежит определению из условий, что функция q_2 является частным решением уравнения (38) и,

следовательно, подстановка q_2 в это уравнение должна обратить его в тождество. Определим необходимые производные по времени от q_2:

$$\dot{q}_2=Bp\cos(pt+\delta);\ \ \ddot{q}_2=-Bp^2\sin(pt+\delta).$$

Подставляя q_2 и ее производные в уравнение (38) и перенося все члены в одну часть, получаем следующее тождество, справедливое в любой момент времени:

$$(-Bp^2+Bk^2-h)\sin(pt+\delta)\equiv 0.$$

Так как синус переменного аргумента равен нулю не для всех значений t, то полученное тождество выполняется, если постоянный коэффициент в скобках при синусе равен нулю:

$$B(k^2-p^2)-h=0.$$

Отсюда

$$B=h/(k^2-p^2)$$

Подставляя значение B в q_2, получаем вынужденные колебания в форме

$$q_2=\frac{h}{k^2-p^2}\sin(pt+\delta). \qquad (41)$$

Таким образом, движение системы характеризуется обобщенной координатой q, состоящей из двух колебаний с различными частотами — собственных q_1 с круговой частотой k и вынужденных q_2 с круговой частотой p:

$$q=q_1+q_2=C_1\cos kt+C_2\sin kt+\frac{h}{k^2-p^2}\sin(pt+\delta). \qquad (42)$$

В амплитудной форме

$$q=A_1\sin(kt+\alpha_1)+\frac{h}{k^2-p^2}\sin(pt+\delta). \qquad (42')$$

Постоянные C_1 и C_2 или A_1 и α_1 определяются из начальных условий $t=0$, $q=q_0$, $\dot{q}=\dot{q}_0$.

Подставляя эти значения в выражения (42) для q и $\dot{q}$ при $t=0$, получаем

$$q_0=C_1+\frac{h}{k^2-p^2}\sin\delta;\ \ \dot{q}_0=C_2k+\frac{hp}{k^2-p^2}\cos\delta.$$

Отсюда

$$C_1=q_0-\frac{h}{k^2-p^2}\sin\delta;\ \ C_2=\frac{\dot{q}_0}{k}-\frac{hp}{k(k^2-p^2)}\cos\delta.$$

Амплитуда собственных колебаний A_1 и начальная фаза α_1 через C_1 и C_2 выражаются формулами

$$A_1=\sqrt{C_1^2+C_2^2};\ \ \operatorname{tg}\alpha_1=C_1/C_2.$$

Следовательно, амплитуда и начальная фаза собственных колебаний при действии возмущающей силы зависят не только

от начальных условий, но и от параметров этой силы, т. е. собственные колебания в этом случае могут возникнуть не только из-за начальных условий, но и благодаря действию возмущающих сил даже при нулевых начальных условиях.

Введем амплитуду вынужденных колебаний $A_2=h/(|k^2-p^2|)$. Тогда в зависимости от соотношения между частотами вынужденные колебания можно выразить в двух формах:

при $p<k$

$$q_2=A_2\sin(pt+\delta);$$

при $p>k$

$$q_2=-A_2\sin(pt+\delta)=A_2\sin(pt+\delta-\pi).$$

Следовательно, при $p<k$ фаза вынужденных колебаний совпадает с фазой возмущающей силы. В этом случае сдвиг фаз ε между ними равен нулю, т. е. вынужденные колебания и возмущающая сила, в частности, достигают одновременно максимальных и минимальных значений.

При $p>k$ сдвиг фаз $\varepsilon=\pi$. Действительно, сдвиг фаз как разность фаз между возмущающей силой и вынужденными колебаниями

$$\varepsilon=(pt+\delta)-(pt+\delta-\pi)=\pi.$$

В этом случае вынужденные колебания находятся в противоположной фазе по отношению к возмущающей силе, т. е., в частности, если возмущающая сила достигает максимума, то функция $q_2(t)$ достигает минимума, и наоборот.

Итак, *вынужденные колебания системы без сопротивления при $p\neq k$, возбуждаемые гармонической возмущающей силой, являются гармоническими колебаниями с постоянной амплитудой. Их частота совпадает с частотой возмущающей силы. Они совершенно не зависят от начальных условий.*

2. Случай резонанса. *Резонансом называется случай совпадения частот собственных колебаний и возмущающей силы*, т. е. когда $p=k$. При совпадении частот частное решение уравнения (38) следует искать в форме $q_2=Bt\cos(pt+\delta)$.

Постоянная B определяется из условия, что q_2 есть частное решение уравнения (38), обращающее его в тождество. Аналогично рассмотренному случаю, подставив q_2 и ее производные в (38) и приравняв нулю постоянный коэффициент при $\sin(pt+\delta)$ [члены с $Bt\cos(pt+\delta)$ взаимно уничтожаются], получаем $B=-h/(2p)$. Тогда вынужденные колебания выразятся в форме

$$q_2=-\frac{ht}{2p}\cos(pt+\delta)=\frac{ht}{2p}\sin\left(pt+\delta-\frac{\pi}{2}\right). \qquad (43)$$

Главной особенностью вынужденных колебаний при резонансе является зависимость их амплитуды от времени:

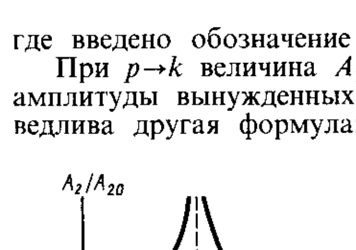

Рис. 119

$A_2=ht/(2p)$. *Амплитуда вынужденных колебаний в этом случае увеличивается пропорционально времени. Сдвиг фаз при резонансе*, как это следует из (43), равен $\pi/2$. Круговая частота вынужденных колебаний при резонансе совпадает с круговой частотой возмущающей силы.

Заметим для построения графика вынужденных колебаний при резонансе, что q_2 изменяется в пределах от $q_2=A_2=ht/(2p)$ до $q_2=-A_2=-ht/(2p)$. Следовательно, согласно (43), графиком вынужденных колебаний является синусоида, заключенная между двумя прямыми $q_2^{(1)}=ht/(2p)$ и $q_2^{(2)}=-ht/(2p)$, проходящими через точки $q_2=0$ и $t=0$ (рис. 119).

Рассмотренный случай колебаний при резонансе без сопротивления практически не встречается, так как при движении системы всегда есть силы сопротивления движению. Установленный теоретически рост амплитуды с течением времени по линейному закону в действительности тоже не наблюдается, хотя амплитуды при резонансе достигают довольно больших значений по сравнению со случаем отсутствия резонанса. Эта особенность вынужденных колебаний при резонансе приводит к тому, что случайно возникший резонанс в машинах, установках и сооружениях (мосты, роторы турбин, полы зданий и т. д.) может привести к их разрушению.

Построим для вынужденных колебаний графики амплитуды и сдвига фаз в зависимости от круговой частоты возмущающей силы. Имеем

$$A_2=\frac{h}{|k^2-p^2|}\ \text{ при } p\neq k\ \text{ или }\ \frac{A_2}{A_{20}}=\frac{1}{\left|1-\frac{p^2}{k^2}\right|},$$

где введено обозначение $A_{20}=h/k^2$ (рис. 120).

При $p\to k$ величина $A_2\to\infty$, но при $p=k$ эту формулу для амплитуды вынужденных колебаний применять нельзя. Справедлива другая формула: $A_2=ht/(2p)$.

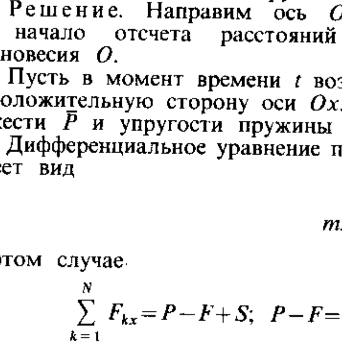

Рис. 120

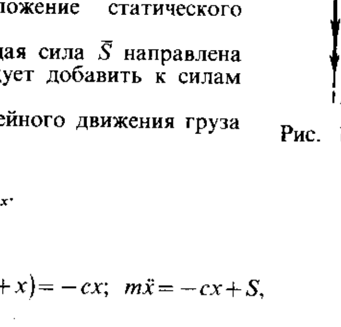

Рис. 121

График зависимости ε от p (рис. 121) состоит из двух отрезков горизонтальных прямых и одной точки, так как при $p<k$ $\varepsilon=0$; при $p=k$ $\varepsilon=\pi/2$; при $p>k$ $\varepsilon=\pi$.

Рис. 122

Пример 1. Груз, имеющий силу тяжести $P=20$ Н, подвешен на пружине (рис. 122), статическое удлинение которой под действием груза $\lambda_{ст}=5$ см. На груз действует возмущающая сила $S=20\sin 14t$ Н. В начальный момент пружина растянута на $\lambda_0=6$ см и грузу сообщена скорость $v_0=10$ см/с, направленная вниз.

Определить движение груза.

Решение. Направим ось Ox вертикально вниз, выбрав за начало отсчета расстояний x положение статического равновесия O.

Пусть в момент времени t возмущающая сила $\bar{S}$ направлена в положительную сторону оси Ox. Ее следует добавить к силам тяжести $\bar{P}$ и упругости пружины $\bar{F}$.

Дифференциальное уравнение прямолинейного движения груза имеет вид

$$m\ddot{x}=\sum_{k=1}^{N}F_{kx}.$$

В этом случае

$$\sum_{k=1}^{N}F_{kx}=P-F+S;\ \ P-F=P-c(\lambda_{ст}+x)=-cx;\ \ m\ddot{x}=-cx+S,$$

так как

$$P=c\lambda_{ст};\ \ k^2=cg/P=196\ с^{-2};\ \ k=14\ с^{-1}.$$

Разделив обе части уравнения на m, получим

$$\ddot{x}+196x=980\sin 14t.$$

Частота возмущающей силы $p=14$ с совпадает с частотой собственных колебаний k. Имеем случай резонанса.

Собственные колебания

$$x_1=C_1\cos 14t+C_2\sin 14t.$$

Вынужденные колебания при резонансе

$$x_2=-\frac{ht}{2p}\cos 14t=-\frac{980t}{2\cdot 14}\cos 14t=-35t\cos 14t.$$

Общее движение груза

$$x=x_1+x_2=C_1\cos 14t+C_2\sin 14t-35t\cos 14t.$$

Скорость движения

$$v=\dot{x}=-14C_1\sin 14t+14C_2\cos 14t-35\cos 14t+35\cdot 14t\sin 14t.$$

Подставляя в x и $\dot{x}$ начальные значения $t=0$, $x=x_0=\lambda_0-\lambda_{ст}=1$ см, $\dot{x}=v_0=10$ см/с, получаем следующие уравнения для определения постоянных:

$$1=C_1;\ \ 10=14C_2-35.$$

Их решения:

$$C_1=1\ см;\ \ C_2=3{,}2\ см.$$

Уравнение движения груза принимает вид

$$x=\cos 14t+3{,}2\sin 14t-35t\cos 14t\ см.$$

Приведем уравнение собственных колебаний к амплитудной форме. Имеем:

$$A_1=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=3{,}35\ см;\ \ \sin\alpha=C_1/A_1=0{,}30>0;\ \ \cos\alpha_1=C_2/A_1>0.$$

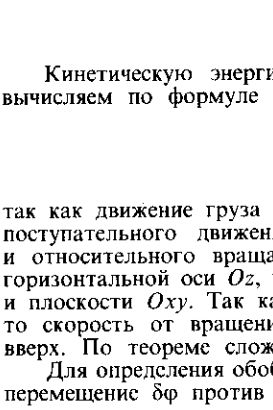

Рис. 123

Угол α_1 находится в первой четверти. По значению, например, синуса этого угла находим $\alpha_1=0{,}305$ рад. Уравнение движения груза принимает форму

$$x=3{,}35\sin(14t+0{,}305)+35t\sin\left(14t-\frac{\pi}{2}\right).$$

Пример 2. Система, состоящая из точечного груза M силой тяжести $P_1=80$ Н, невесомых стержней и пружины жесткостью $c=5$ Н/см, расположена в вертикальной плоскости (рис. 123). Штанга OA движется в вертикальных направляющих по закону $y_0=l\sin pt$, где $l=1{,}6$ см, $p=8\ с^{-1}$. Горизонтальное положение стержня BM соответствует положению статического равновесия системы при $y_0=0$. В начальный момент система находится в положении статического равновесия. Угловая скорость стержня BM равна нулю и $y_0=0$. Трением пренебречь.

Определить малое движение груза M в вертикальном направлении, если $l_1=90$ см, $l_2=60$ см.

Решение. Система имеет одну степень свободы. Выберем за обобщенную координату угол φ, отсчитываемый от горизонтального направления против часовой стрелки.

Связями системы являются направляющие и шарниры, трением в которых пренебрегаем. Такие связи следует считать идеальными.

Уравнение Лагранжа для системы имеет форму

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q.$$

Кинетическую энергию системы, в которой массу имеет только груз, вычисляем по формуле

$$T=\frac{P_1}{g}\frac{v^2}{2}=\frac{P_1}{g}(\dot{y}_0+l_1\dot{\varphi})^2,$$

так как движение груза можно считать сложным, состоящим из переносного поступательного движения вместе с точкой O со скоростью $\dot{y}_0=lp\cos pt$ и относительного вращательного движения с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг горизонтальной оси Oz, проходящей через точку O перпендикулярно стержню и плоскости Oxy. Так как угол φ и угловая скорость $\dot{\varphi}$ считаются малыми, то скорость от вращения вокруг оси равна $l_1\dot{\varphi}$ и направлена вертикально вверх. По теореме сложения скоростей, $v=\dot{y}_0+l_1\dot{\varphi}$.

Для определения обобщенной силы сообщим системе в момент t возможное перемещение $\delta\varphi$ против часовой стрелки (в положительную сторону угла φ) и вычислим элементарную работу активных сил на этом возможном перемещении в предположении, что угол φ — малая величина. Имеем

$$Q=\frac{\sum\delta A_k}{\delta\varphi}=\frac{-P_1l_1\delta\varphi+Fl_2\delta\varphi}{\delta\varphi}=-P_1l_1+Fl_2,$$

где $F=c\lambda$ — сила упругости пружины; $\lambda=\lambda_{ст}+(y_0-l_2\varphi)$ — ее удлинение. Следовательно,

$$Q=-P_1l_1+c\lambda_{ст}l_2+cl_2(y_0-l_2\varphi)=cl_2(y_0-l_2\varphi),$$

так как в положении статического равновесия момент силы тяжести и момент силы упругости относительно точки O равны друг другу, т. е. $P_1l_1=c\lambda_{ст}l_2$.

Вычислим величины, входящие в левую часть уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0;\ \ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{P_1l_1}{g}(\dot{y}_0+l_1\dot{\varphi});\ \ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{P_1l_1}{g}(\ddot{y}_0+l_1\ddot{\varphi}).$$

После подстановки этих значений в уравнение Лагранжа получим

$$\frac{P_1l_1}{g}(\ddot{y}_0+l_1\ddot{\varphi})=cl_2(y_0-l_2\varphi),$$

или

$$\ddot{\varphi}+\frac{cl_2^2g}{P_1l_1^2}\varphi=\frac{cl_2g}{P_1l_1^2}y_0-\frac{\ddot{y}_0}{l_1}.$$

Но $\ddot{y}_0=-lp^2\sin pt$, поэтому

$$\frac{cl_2g}{P_1l_1^2}y_0-\frac{\ddot{y}_0}{l_1}=\left(\frac{cl_2g}{P_1l_1^2}+\frac{p^2}{l_1}\right)l\sin pt.$$

Дифференциальное уравнение движения системы можно составить не пользуясь уравнением Лагранжа, а применяя уравнение относительного вращательного движения твердого тела (стержень с грузом), с учетом момента силы инерции от переносного движения.

Вводя обозначения

$$k^2=\frac{cl_2^2g}{P_1l_1^2}=\frac{5\cdot 60^2\cdot 980}{80\cdot 90^2}=27{,}22;\ \ k=5{,}2\ с^{-1};$$

$$h=\left(\frac{cl_2g}{P_1l_1^2}+\frac{p^2}{l_1}\right)l=(0{,}45+0{,}71)\,1{,}6\approx 1{,}86\ с^{-2},$$

получим следующее дифференциальное уравнение малых колебаний:

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=h\sin pt.$$

Его решение $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$, где

$$\varphi_1=C_1\cos kt+C_2\sin kt$$

— общее решение однородного уравнения (собственные колебания);

$$\varphi_2=\frac{h}{k^2-p^2}\sin pt$$

— частное решение неоднородного уравнения (вынужденные колебания), так как $p\neq k$.

Таким образом,

$$\varphi=C_1\cos kt+C_2\sin kt+\frac{h}{k^2-p^2}\sin pt;$$

$$\dot{\varphi}=-C_1k\sin kt+C_2k\cos kt+\frac{hp}{k^2-p^2}\cos pt.$$

Начальные условия задачи: $t=0$, $\varphi=0$, $\dot{\varphi}=0$. Подставляя эти значения в выражения для φ и $\dot{\varphi}$, получаем

$$0=C_1;\ \ 0=C_2k+\frac{hp}{k^2-p^2},$$

или

$$C_1=0;\ \ C_2=\frac{p}{k}\frac{h}{k^2-p^2}=\frac{8\cdot 1{,}86}{5{,}2\cdot 36{,}8}=0{,}0785.$$

После этого решение дифференциального уравнения примет вид

$$\varphi=0{,}0785\sin 5{,}2t-0{,}0505\sin 8t.$$

Для координат груза M имеем

$$x=l_1=90\ см;\ \ y=y_0+l_1\varphi=1{,}6\sin 8t+90\,(0{,}0785\sin 5{,}2t-0{,}0505\sin 8t)=$$
$$=7{,}1\sin 5{,}2t-2{,}9\sin 8t\ см.$$